Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului $a=\frac{4}{\sqrt{2}}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că axa Ox este tangentă la graficul funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{(x-1)(x+2)}=(x+2)\sqrt{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\ge 2$, știind că mulțimea $\{3,4,5,\ldots,n+2\}$ are exact 55 de submulțimi cu 2 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1 și d_2, de ecuații $2x-y+1=0$, respectiv $x+y+2=0$. Determinați ecuația dreptei d care este perpendiculară pe dreapta d_2 și trece prin punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2.

5p **6.** Arătați că $\sin\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m,x)=\begin{pmatrix}2 & -x & 1\\ 1 & m & 3\\ 3 & -2 & x\end{pmatrix}$, unde m și x sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4,2)\right)=0$.

5p **b)** Determinați rangul matricei $A(2,1)$.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale nenule și distincte (n,p) pentru care $\det\left(A(3,n)\right)=\det\left(A(3,p)\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\frac{xy}{3}-x-y+6$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*3=3$.

5p **b)** Arătați că $x*(y+z-3)=(x*y)+(x*z)-3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\ne 3$ pentru care $\left(x*(x+x'-3)\right)+\left(x'*(2x-3)\right)=42$, unde x' este simetricul lui x în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-ax$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=0$, arătați că $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\sqrt{2}$, situat pe graficul funcției f, este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, graficul funcției f admite asimptotă spre $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \frac{x f(x)}{\operatorname{arctg} x}\,dx = 20$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f^n(x)\,dx = 0$.