Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați produsul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\sqrt[3]{7}<x\le\log_2 21\right\}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y=5x+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 9^x-3^{2x}-3=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
5p	**5.** Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.
5p	**6.** Calculați $\operatorname{tg}x$, știind că $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a+1 & 1 & a\\ 1 & -1 & -a\\ 2-a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}(a+1)x+y+az=-5\\ x-y-az=10\\ (2-a)x+y+z=1-a\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
5p	**c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0) și x_0 este număr întreg.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=x+y-\frac{xy}{5}$.
5p	**a)** Arătați că $1*5=5$.
5p	**b)** Determinați numărul real x, $x\ge 0$, pentru care $\sqrt{x}*\sqrt{x}=5$.
5p	**c)** Determinați valorile reale ale lui a, $a\ne 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „$*$” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f, sunt concurente.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)\,dx=7$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Știind că $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2(x+1)\sqrt{x+1}-6\sqrt{x+1}+4$ este o primitivă a funcției f, arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)\,dx=32$.