Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 7 + \sqrt{7}\}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f are ordonata strict mai mare decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} = x - 3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 2 elemente ale unei mulțimi cu 12 elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$ și $B(-1,2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a paralelei prin A la OB cu paralela prin B la OA.

5p **6.** Arătați că $\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} = 1$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c) = 1$.

2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5p **a)** Arătați că $3 * 4 = 5$.

5p **b)** Determinați $x \in M$ pentru care $x * \sqrt{5} < x + 1$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule, pentru care numerele m, n și $m * n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{4}{3}$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_{-1}^{1} \lvert x\ln(f(x))\rvert\,dx = 2\ln 2 - 1$.