Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2n+1<10 \Leftrightarrow n<\frac{9}{2}$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem că mulțimea M are 5 elemente	**3p**
2.	$\Delta=100-4m$, $y_V=m-25$	**2p**
	Vârful parabolei asociate funcției f este situat pe axa $Ox \Leftrightarrow y_V=0 \Leftrightarrow m=25$	**3p**
3.	$\sqrt{x-5}=7-x \Rightarrow x-5=(7-x)^2$, deci $x^2-15x+54=0$	**3p**
	$x=6$, care convine; $x=9$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Sunt $9\cdot 10\cdot 8=720$ de numere naturale de trei cifre care nu sunt multipli de 5, deci sunt 720 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{720}{900}=\frac{4}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	Coordonatele punctului C sunt $x_C=1$, $y_C=\frac{7}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} \Rightarrow 6=\frac{4\cdot 5\cdot \sin A}{2} \Rightarrow \sin A=\frac{3}{5}$	**3p**
	$\cos^2 A=1-\sin^2 A=\frac{16}{25}$ și, cum unghiul A este ascuțit, obținem $\cos A=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}=1+a^2+2(a+1)^2-2a-a(a+1)-(a+1)=$	**3p**
	$=2a^2+2=2(a^2+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}$, $A(0)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}3a+2 & a+2 & 2a+1\\ 2a+4 & 2 & a+2\\ a+4 & a+2 & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a+2 & 2a+1\\ 4 & 2a+2 & 2a+2\\ 4 & 3a+2 & 2a+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow a=0$	**2p**
c)	Sistemul este compatibil determinat și are soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0=1$, $y_0=2$ și $z_0=4$	**3p**
	Cum $x_0z_0=4=y_0^2$, obținem că x_0, y_0 și z_0 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**

2.a)	$x*0=\dfrac{2(x+0)}{x\cdot 0+2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x}{2}=x$, pentru orice $x\in M$	**2p**
b)	$x*y-2=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}-2=\dfrac{2x+2y-2xy-4}{xy+2}=-2\cdot\dfrac{xy-x-y+2}{xy+2}=$	**3p**
	$=-2\cdot\dfrac{(x-1)(y-1)+1}{xy+2}<0$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)\Rightarrow x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$	**2p**
c)	Cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $0<m*n<2$ și, cum $m*n$ este număr natural, obținem $m*n=1$	**2p**
	$\dfrac{2(m+n)}{mn+2}=1\Leftrightarrow mn-2m-2n+2=0\Leftrightarrow(m-2)(n-2)=2$ şi, cum m şi n sunt numere naturale nenule, obținem perechile $(3,4)$ şi $(4,3)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(x^2+4x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x+5}{e^x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	Cum funcția f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este injectivă, deci graficul funcției f intersectează orice paralelă la Ox în cel mult un punct	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(4x^3+1\right)dx=\left(x^4+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(4x^3+1\right)^3dx=\frac{1}{12}\int_0^1\left(4x^3+1\right)'\left(4x^3+1\right)^3dx=\frac{1}{12}\cdot\frac{\left(4x^3+1\right)^4}{4}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{5^4-1}{48}=13$	**2p**
c)	$4t^3+1\geq 5$, pentru orice $t\in[1,+\infty)\Rightarrow\displaystyle\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=\int_1^x\ln\left(4t^3+1\right)dt\geq\int_1^x\ln 5\,dt=(x-1)\ln 5$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln 5=+\infty$, obținem $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_1^x\ln\left(f(t)\right)dt=+\infty$	**2p**